

C^* -algebry
Lista 2

Zad 1. Niech $C_c(M)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych, których domknięte nośniki są zwarte. Pokazać, że jeżeli jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, to $C_c(M)$ jest gęstą podalgebrą w $C_0(M)$.¹

Zad 2. Niech M będzie przestrzenią Hausdorffa. Pokazać, że dla zbioru U przedłużając dowolne $a \in C_0(U)$ na X kładąc $a(x) = 0$ dla $X \setminus U$ otrzymujemy zanurzenie algebry Banacha $C_0(U)$ jako domknięty ideał w algebrze Banacha $C_0(M)$.

Zad 3. Niech M będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Pokazać, że każdy ideał w algebrze Banacha $C_0(M)$ jest postaci $C_0(U)$ dla pewnego zbioru otwartego $U \subseteq M$.

Zad 4. Pokazać, że dla dowolnej grupy G wzór $\pi_{\text{tr}}(a) = \sum_{g \in G} a(g)$ definiuje kontraktywny homomorfizm algebr $\pi_{\text{tr}} : \ell^1(G) \rightarrow \mathbb{F}$. Jest to tak zwana reprezentacja trywialna. Czy jądro tego homomorfizmu może być trywialne? Czy algebra $\ell^1(G)$ może być prosta?

Zad 5. Niech N będzie podgrupą normalną grupy G . Pokazać, że homomorfizm ilorazowy grup $G \rightarrow G/N$ linearyzuje się do kontraktywnego homomorfizmu algebr $\Phi : \ell^1(G) \rightarrow \ell^1(G/N)$ danego wzorem $\Phi(a)(gN) = \sum_{n \in N} a(gn)$. Zauważyć, że jądro Φ zawiera przestrzeń $(\text{id} - \pi_{\text{tr}})(\ell^1(N)) = \{a - \pi_{\text{tr}}(a) : a \in \ell^1(N)\}$, więc jest nietrywialnym ideałem, o ile podgrupa $N \triangleleft G$ jest nietrywialna.

Zad 6 (Lemat Fekete). Dla dowolnego ciągu liczbowego $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, który jest subaddytywny, tzn. $x_{n+m} \leq x_n + x_m$ dla $n, m \geq 1$, granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ istnieje i jest równa $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$.

Zad 7. Pokazać, że dla dowolnego elementu $a \in A$ w algebrze Banacha A definicja promienia spektralnego jako

$$r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

jest poprawna, tzn. granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ istnieje i jest równa $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Zad 8. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedyneką. Wykazać następujące własności widma:

- a) Dla dowolnych $a, b \in A$ mamy $\sigma_A(ab) \setminus \{0\} = \sigma_A(ba) \setminus \{0\}$.²
- b) Jeżeli $a \in \text{Inv}(A)$ odwracalny, to $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1} := \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$.
- c) Dla dowolnego $a \in A$ oraz wielomianu $p(z) = \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{C}$, mamy $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$.³

Zad 9. Niech $B = \ell^1(\mathbb{Z})$ będzie zespoloną grupową algebrą Banacha. Rozważmy element $v = 1_{\{1\}}$.

- a) Pokazać, że $v \in \text{Inv}(B)$ oraz $\|v\| = \|v^{-1}\| = 1$. Wyciągnąć stąd wniosek, że $\sigma_B(v) \subseteq \mathbb{T}$.
- b) Pokazać, że dla dowolnego $\lambda_0 \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ oraz ciągu $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ takiego, że $|\lambda_n| < 1$ oraz $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ mamy $\|(v - \lambda_n)^{-1}\| \rightarrow \infty$. Wyciągnąć stąd wniosek, że

$$\sigma_B(v) = \mathbb{T}.$$

- c) Uzasadnić, że podalgebra Banacha A algebry B generowana przez v oraz 1 może być utożsamiona z algebrą półgrupową $\ell^1(\mathbb{N})$. Zauważyć, że element v nie jest odwracalny w algebrze $\ell^1(\mathbb{N})$. Wyciągnąć stąd wniosek, że

$$\sigma_A(v) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Zad 10. Pokazać, że jeżeli A nie ma jedynek, to $0 \in \sigma_A(a)$ dla dowolnego $a \in A$.

Zad 11. Niech A będzie algebrą Banacha bez jedynek, a $\tilde{A}$ jej jednowymiarowym ujedynkowieniem. Dla $a, b \in A$ zdefiniujemy nowy iloczyn $a \circ b := a + b - ab$, tzw. *quasi-iloczyn*. Oznaczmy przez $\text{qInv}(A)$ zbiór elementów *quasi-odwracalnych*, tzn. takich $a \in A$, dla których istnieje $b \in A$ taki, że $a \circ b = b \circ a = 0$. Pokazać, że $\sigma_A(a) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{\lambda}a \notin \text{Inv}(qA)\}$.

¹Hint: Wykorzystać Lemat Urysohna, patrz też Wykład 2 - Analiza Funkcjonalna.

²Hint: Sprawdzić, że jeżeli $ab - 1$ odwracalny, to $b(ab - 1)^{-1}a - 1$ odwrotny do $ba - 1$.

³Hint: Patrz np. Wykład 15 - Analiza Funkcjonalna.